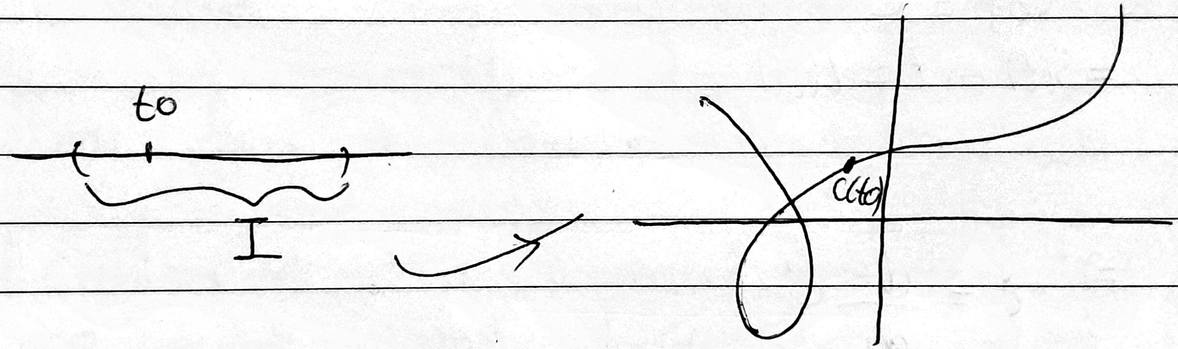
Μάθημα 3º 25/10/17

Αναπαραμέτριση με φυσική παράμετρο ή παράμετρο μήκος τόξου.

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη και $t_0 \in I$. Η συνάρτηση $s: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$ καλείται <u>συνάρτηση μήκος τόξου της c με αφετηρία το t_0</u>



Από το Θ.Θ.Ο.Π γνωρίζω ότι η συνάρτηση $s(t)$ είναι διαφορίσιμη με παράγωγο

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0,$$

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\|$$

$\Rightarrow$ $S(t)$ γνησίως αύξουσα ($\uparrow$) άρα αντιστρέφεται.

Έχει διαφορίσιμη αντίστροφη $S = S(t) \Leftrightarrow t = f(s)$
όπου $f = S^{-1}$

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|c'\|} > 0 \Rightarrow$$ Ορίζεται η αναπαραμέτρηση

$\tilde{c} = C \circ f$ με παράμετρο s. Αυτή είναι η αναπαραμετρικοποίηση με φυσική παράμετρο ή μήκος τόξου

• Αν αλλάξω αφετηρία (t_1) αλλάζει και η συνάρτηση τόξου.

Συμβολισμός
• $\tilde{c} = C \circ f = C$
• $S = S(t) \Leftrightarrow t = t(s)$

$$\frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} \Leftrightarrow \dot{c} = \frac{dt}{ds}c'$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$$

Συμπέρασμα: $\dot{c} = \dfrac{c'}{\|c'\|}$

$' = \frac{d}{dt}$ | $\dot{\ } \frac{d}{ds}$

$'' = \frac{d^2}{dt^2}$ | $\ddot{\ } = \frac{d^2}{ds^2}$

<u>Παρατήρηση</u> Η καμπύλη c έχει παράμετρο μήκος τόξου <u>αν-ν</u> το διάνυσμα ταχύτητας <u>είναι</u> $\boxed{\text{μοναδιαίο παντού}}$

<u>Αποδ</u>

Έστω $c(t)$ καμπύλη με $\|c'(t)\| = 1 \ \forall \ t \in I$

Η συνάρτηση μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 \in I$ <u>είναι</u>:

$$s = S(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} 1\, du = t - t_0 \Rightarrow \boxed{S = t - t_0} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t = S + t_0 \Rightarrow t =$ μήκος τόξου

<u>"ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ"</u> Θεωρώ την καμπύλη $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$

Είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$\|c'(t)\| = r > 0 \Rightarrow$ Η c είναι κανονική. Δεν έχει παράμετρο το μήκος τόξου. Η συνάρτηση μήκος τόξου της c με αφετηρία το t_0 είναι η: $S = S(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du =$

$= \int_{t_0}^{t} r\,du \Rightarrow \boxed{S = r(t - t_0)}$ <u>Επιλέγω</u> $t_0 = 0$: $S = rt \Leftrightarrow t = \frac{S}{r}$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η αναπαραμετροποίηση της καμπύλης με φυσική παράμετρο είναι: $c(S) = \left(r\cos\frac{S}{t}, r\sin\frac{S}{t}\right)$

$$\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{t}\right)$$

Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\alpha\cos t, b\sin t)$, $\alpha, b > 0$
Είναι λεία καμπύλη με διάνυσμα ταχύτητας
$c'(t) = (-\alpha\sin t, b\cos t)$

$\| c'(t) \| = \sqrt{\alpha^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} > 0 \ \forall t \Rightarrow c$ είναι κανονική και η παράμετρος t δεν είναι μήκος τόξου

Η συνάρτηση μήκους τόξου της c με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι:

$$S = S(t) = \int_0^t \sqrt{\alpha^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\, du$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> | Έστω $\tilde{c}, c$ καμπύλες γεωμετρικώς ισότιμες.
Αν η c έχει παράμετρο φυσική, τότε η $\tilde{c}$ φυσική παράμετρος

$\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$
$T = T \circ A$, $A \in O(2)$

$$\frac{d\tilde{c}}{ds} = A\dot{c}$$

Παρατηρώ ότι $\left\| \frac{d\tilde{c}}{ds} \right\| = \| A\dot{c} \| \underset{\text{μετασχ.}}{\overset{A \text{ ορθ}}{=}} \| \dot{c} \| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ μήκος τόξου για την $\tilde{c}$

Άρα μπορώ να γράψω: $\boxed{\dot{\tilde{c}} = A\dot{c}}$

• Συνάρτηση μήκος τόξου : $s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du$

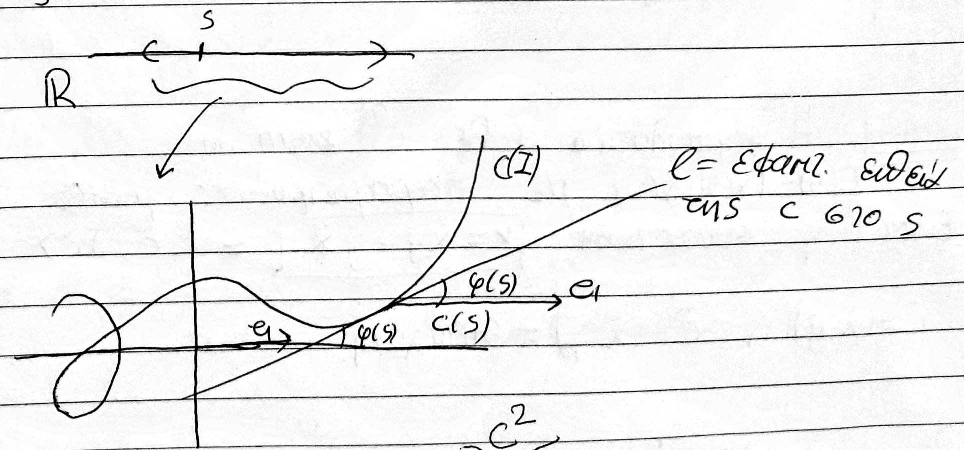
• Κάθε κανονική καμπύλη δέχεται αναπ/ση με φυσική παράμετρο

• Μια καμπύλη έχει παράμετρο το μήκος τόξου ⟺ $\|c'\| = 1$ παντού

Καμπυλότητα καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο.

Καμπυλότητα Κύκλου : $\kappa = \frac{1}{R}$

Έστω $c : I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s.



$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$ Καλούμε καμπυλότητα της C^2 καμπύλης c με φυσική παράμετρο τη συνάρτηση

$\kappa : I \to \mathbb{R}$ $\quad \kappa(s) = \varphi'(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}$ όπου $\varphi(s) = (\dot{c}(s), e_1)$

ΛΗΜΜΑ Έστω C^1-συναρτήσεις $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f^2(t) + g^2(t) = 1$. Θεωρώ $t_0 \in I$ και φ_0 ώστε $f(t_0) = \cos\varphi_0$, $g(t_0) = \sin\varphi_0$. Τότε υπάρχει μοναδική C^1 συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(t) = \cos\varphi(t)$, $g(t) = \sin\varphi(t)$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ | Υπολογισμός της καμπυλότητας.

$C(s) = (x(s), y(s))$ $\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ $\begin{cases} \dot{x}(s) = \cos\varphi(s) \\ \dot{y}(s) = \sin\varphi(s) \end{cases}$ $k = \dot{\varphi}$	$\dot{x} = \cos\varphi \Rightarrow \ddot{x} = -\dot{\varphi}\sin\varphi \Rightarrow \ddot{x} = -k\dot{y}$ $\dot{y} = \sin\varphi \Rightarrow \ddot{y} = \dot{\varphi}\cos\varphi \Rightarrow \ddot{y} = k\dot{x}$ $\Rightarrow \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = k(\dot{y}^2 + \dot{x}^2)$	$\xrightarrow[x\dot{x}]{x-\dot{y}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ Η καμπυλότητα κάθε C^2 καμπύλης $C(s) = (x(s), y(s))$ με παράμετρο το μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $\boxed{k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$

$\dot{c} = (\dot{x}, \dot{y})$, $\ddot{c} = (\ddot{x}, \ddot{y}) =$ επιτάχυνση

$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$J = R_{\pi/2}$ $J(u_1, u_2) = (-u_2, u_1)$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $J\dot{c} = (-\dot{y}, \dot{x})$